

ДКПП 72.20.22.500

ЗАТВЕРДЖЕНО
25775375.03.01 МРВ

Програмний засіб
**“Програмно-методичний комплекс Терм VII підтримки
практичної навчальної математичної діяльності”**
Версія 2.0 реліз 03

Методичні рекомендації вчителям

25775375.03.01 МРВ

Випуск 2

Введені в дію _____

/рік-місяць-число/

Термін дії до _____

/рік-місяць-число/

Або без
обмеження

Херсон 2004

Зміст

Методичні рекомендації вчителям	1
1. Вступ.....	3
1.1. Концепція підтримки діяльності учня в ПМК ТерМ	3
1.2. Концепція підтримки діяльності вчителя	4
1.3. Склад ПМК ТерМ.....	4
2. Характеристики програмних модулів ПМК ТерМ.....	5
2.1. Навчальний посібник	5
2.2. Вправи.....	5
2.3. Задачник	6
2.4. Зошит	6
2.5. Середовище розв'язання	7
2.6. Розв'язувач	13
2.7. Графіки	14
2.8. Довідник	15
3. Використання ПМ Навчальний посібник та ПМ Вправи	16
Вправи.....	16
4. Організація практичної роботи в ПМК ТерМ	18
4.1. Структура задачника	18
4.2. Розв'язання задач у режимі перевірки.....	19
4.3. Розв'язання задач у режимі автоматизації	19
4.4. Розв'язання задач у змішаному режимі.....	20
4.5. Використання зошитів	20
5. Розв'язувач	21
6. Графіки	21
Література.....	23

1. Вступ

Значна кількість традиційних комп'ютерних курсів математики базується на ідеях програмованого навчання, хоча й використовує сучасні апаратні та програмні можливості обчислювальної техніки і нові методи представлення знань. Найбільш розвиненою і розробленою як з методичної, так і з технічної точок зору за такого підходу виявляється лекційна частина курсу. Проблема адекватної підтримки практичних занять з математики менш розроблена. Математична практична діяльність учня полягає в розв'язуванні математичних задач. Відомі *системи комп'ютерної алгебри* (або математичні системи) – Derive, Mathematica, Maple, MathCad тощо - значною мірою вирішують задачу підтримки професійної математичної діяльності, пов'язаної із символьними обчисленнями і чисельними розрахунками. Вони надають професіоналам можливості розв'язання широкого кола математичних задач. Навчальна математична діяльність, однак, має певну специфіку.

Метою учня є побудова ходу розв'язання математичної задачі, а не одержання відповіді.

Тому математичні системи навчального призначення повинні підтримувати саме хід розв'язування математичної задачі. Слід зазначити також, що професійні системи комп'ютерної алгебри мають англomовний інтерфейс та занадто дорогі для використання в загальноосвітній школі. Саме з метою уникнення цих недоліків і створено програмно-методичний комплекс ТерМ VII (ПМК). Фактично ПМК ТерМ VII є шкільною системою комп'ютерної алгебри.

Основне призначення системи ТерМ - комп'ютерна підтримка практичних занять і лабораторних робіт з математики - тобто активної математичної діяльності користувача (учня, студента).

У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання, набуті на попередніх етапах навчання, для розв'язання практичних задач.

ПМК ТерМ VII може використовуватися вчителем на уроці у процесі пояснення методів розв'язання алгебраїчних задач, для проведення самостійних і контрольних робіт. Окремий модуль призначений для перевірки практичних вмінь учнів та надбання ними навичок алгебраїчних перетворень.

Розвиток ПМК ТерМ буде здійснюватися включенням до нього як нових предметних областей, так і нових типів задач, тобто реалізації в повному обсязі концепцій, викладених нижче.

1.1. Концепція підтримки діяльності учня в ПМК ТерМ

Один з найважливіших аспектів підтримки роботи учня – *перевірка правильності ходу розв'язання задачі*. Зокрема, вирішуючи алгебраїчну задачу, учень перетворює математичні вирази. Будь-яка помилка, допущена в перетвореннях, приводить у результаті до неправильної відповіді. Цей факт виявляється учнем занадто пізно: або при порівнянні отриманого результату з відповіддю, або при одержанні низької оцінки за контрольну роботу. Уникнути цього можна, якщо доручити програмному засобу перевірку правильності перетворень на кожному кроці розв'язування подібно до перевірки правильності правопису в Microsoft Word. Так, розв'язуючи задачу в ПМК ТерМ, учень не може продовжувати її рішення, якщо ним допущено помилку.

Другий, не менш значущий аспект підтримки, – *автоматизація рутинних дій учня*, пов'язаних з обчисленнями. Наприклад, учню 7-го класу алгоритми арифметичних дій над цілими та раціональними числами знайомі досить добре. Складність полягає в тому, що він змушений витратити навчальний час на

виконання рутинних (для його рівня розвитку) обчислень, спрямованих на отримання відповіді. В ПМК ТерМ цю проблему вирішено.

Третій аспект – надання учню зручного способу користування навчальною, навчально-методичною та довідковою інформацією. ПМК ТерМ надає користувачам таку інформацію. Математична система навчального призначення також повинна надавати учневі відповідний математичний інструментарій: калькулятор, засоби побудови графіків, що також враховано в ПМК ТерМ.

1.2. Концепція підтримки діяльності вчителя

Будь-яка розвинена математична система повинна забезпечувати ефективне проведення навчального процесу в цілому, підтримуючи взаємодію вчителя й учня.

Перший аспект такої підтримки - *перевірка правильності ходу розв'язування задачі*. Для вчителя цей вид підтримки повинен полягати у перевірці системою правильності ходу розв'язування задачі на кожному кроці, тим самим виключаючи можливість припущення помилок учнем. Задача вчителя полягає в тому, щоб перевірити раціональність дій учня під час розв'язування задачі.

Другий аспект підтримки діяльності вчителя – *автоматизація тестування знань учнів*. Система повинна надавати можливість здійснення перевірки знання основних математичних правил і формул. В ПМК ТерМ реалізовано програмний модуль Вправи, який виконує цю функцію.

Третій аспект – надання вчителю заздалегідь спланованої згідно з вимогами стандартів *системи навчальних матеріалів* для проведення всього циклу уроків з можливістю його модифікації. Зокрема, Задачник повинен містити завдання для кожного уроку, причому вчитель має можливість розробляти та задавати учням „свої” задачі.

Нарешті, вчителю має бути надано можливість використовувати систему на уроках і під час *викладання нового матеріалу в якості електронного підручника*.

1.3. Склад ПМК ТерМ

Основний вид діяльності користувача в ПМК – розв'язування математичної задачі. Цей процес становить послідовність кроків, на кожному з яких користувач виконує деяке перетворення математичного об'єкта – моделі математичної задачі. Таким чином, основним програмним модулем ПМК є спеціальний модуль - *Середовище розв'язання (задач)*. Основні функції цього модуля – перевірка правильності перетворень, виконаних користувачем, або автоматичне виконання перетворення за командою користувача. Список припустимих перетворень надано у модулі *Довідник*, звідки користувач на кожному кроці обирає потрібне перетворення. Редагування і перетворення алгебраїчних виразів підтримуються спеціалізованим *Математичним редактором*.

Джерелом задач є *Задачник* - модуль системи, в якому представлені всі типи задач, що підтримуються *Середовищем розв'язання*. Розв'язані задачі зберігаються в *Зошиті* користувача. Вищезгадані програмні модулі безпосередньо підтримують процес розв'язування задачі.

Важливим модулем системи є *Навчальний посібник*. У посібнику представлено теоретичний матеріал. Виклад цього матеріалу доповнюється програмним модулем *Вправи*. Мета кожної вправи в цій системі - усне розв'язування нескладних задач з даної теми. Система перевіряє правильність відповіді.

Нарешті, ПМК містить програмні модулі (так звані „математичні інструменти”) - *Розв'язувач* і *Графіки*.

Робота користувачів у системі персоніфікована. Кожен користувач має декілька власних *Зошитів*.

2. Характеристики програмних модулів ПМК ТерМ

2.1. Навчальний посібник

Програмний модуль Навчальний посібник (далі - посібник) по суті є електронним підручником, зміст якого узгоджений з програмою з алгебри у 7-9 класах загальноосвітньої школи.

Відзначимо, що термін "електронний підручник" використовується в літературі часто в широкому розумінні – для позначення програмних засобів навчального призначення. Під електронним підручником ми розуміємо модуль системи, у якому представлено навчальний матеріал. Подання цього матеріалу доповнюється системою вправ. Передбачається, що користувач може відкрити посібник, переглянути його зміст, обрати навчальний матеріал для вивчення і, засвоївши цей матеріал, виконати вправи для самоперевірки.

Посібник пропонує користувачу (учню, вчителю) навчальний матеріал, структурований відповідно до тематичного плану навчального курсу (тема, параграф). Цей матеріал надано у вигляді гіпертексту, при цьому використані сучасні можливості представлення знань.

Кожен параграф теоретичного матеріалу підручника розрахований на один сеанс роботи користувача. Параграф має унікальний номер. У кінці кожного параграфа вбудовані кнопки вправи з кнопками *Перевір себе*, які здійснюють контекстні виклики Програмного модуля Вправи.

Параграфи посібника, крім теоретичного матеріалу, містять ще й систему навчальних прикладів розв'язання задач.

Система самоперевірки, реалізована в програмному модулі Вправи, надає користувачеві можливість набути первісні уміння та навички в усному розв'язуванні математичних задач на заданий навчальний матеріал.

Зрештою зауважимо, що поряд з даним посібником ми рекомендуємо використовувати також інші посібники та підручники – як електронні, так і паперові.

2.2. Вправи

Програмний модуль *Вправи* призначено для самоперевірки знань учнів та отримання ними практичних умінь і навичок обчислень та застосування алгебраїчних перетворень у процесі розв'язання нескладних задач на дану тему.

Кожна вправа містить три однотипних приклади. Ми пропонуємо таку методику розв'язування прикладу: учень має розв'язати приклад усно або за допомогою чернетки, а потім вписати результат у поле відповіді. Правильність відповідей перевіряється системою одразу для трьох прикладів. Сигнал червоного кольору означає, що відповідь неправильна. У цьому випадку учень має знайти та виправити помилку. Жовтий колір означає, що відповідь можна спростити. Таким чином, якщо учень не може одразу ввести остаточну правильну відповідь, він може дати деяку проміжну відповідь. Тоді сигнал жовтого кольору означає, що учень на вірному шляху.

Кожен тип завдань для самоперевірки містить десять-дванадцять задач, із яких випадково обираються будь-які три. Виконання вправи можна повторити з іншими прикладами (*Вправи-Повторити*). Таким чином, учитель може диференціювати навчальне навантаження учнів з виконання вправ. Відзначимо, що робота учня над цими вправами комп'ютером не оцінюється. Ми вважаємо, що на цьому етапі роботу учня може оцінювати сам учень або вчитель.

2.3. Задачник

Програмний модуль Задачник призначено для зберігання задач, які користувач може розв'язувати у середовищі розв'язання або із застосуванням програмних модулів Графіки та Розв'язувач. Для того, щоб почати розв'язання, треба лише натиснути на кнопку *Розв'язувати*. Як і навчальний посібник, Задачник структуровано за змістом на розділи та параграфи. Кожен з параграфів містить перелік алгебраїчних задач. Зауважимо, що укладачі задачника підбирали задачі з різноманітних джерел. При цьому ми орієнтувалися на програму з алгебри відповідно 7-9 класів загальноосвітньої школи. Таким чином, більшість задач є такими, які розв'язуються на уроках алгебри у сьомому, восьмому або дев'ятому класах. Для 7-го класу виключенням є параграф, що містить задачі на розв'язування систем трьох лінійних рівнянь з трьома змінними, та деякі з текстових задач підвищеної складності на складання математичних моделей. Учитель може використовувати ці задачі на власний розсуд. Ми можемо рекомендувати, наприклад, наводити приклади на системи лінійних рівнянь як задачі, які мають простий метод розв'язування, але потребують значних обчислень.

Крім задач, які пропонуються до розв'язання на практичних заняттях або вдома, Задачник містить умови тематичних атестацій для 7 та 8 класів. Кожна тематична атестація запропонована в 6-ти приблизно рівних за складністю варіантах контрольних робіт.

Клас	Перелік тематичних атестацій
VII	1. Рівняння. 2. Вирази зі змінними. Одночлени. 3. Многочлени. 4. Формули скороченого множення. 5. Розкладання на множники. 6. Перетворення виразів.
VIII	1. Основна властивість дробу. 2. Додавання і віднімання дробів. 3. Квадратний корінь і його властивості. 4. Перетворення виразів, що містять квадратний корінь. 5. Квадратні рівняння. 6. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь. Теорема Вієта. 7. Функції.

Особливість нашого задачника полягає в тому, що всі текстові задачі, тобто задачі на складання та розв'язання математичних моделей, мають змістовну підтримку. Комп'ютер перевіряє правильність математичної моделі (лінійного рівняння або системи лінійних чи алгебраїчних рівнянь), складеної учнем. Якщо ж учень не в змозі самостійно скласти цю модель, комп'ютер може це зробити за нього.

2.4. Зошит

Зошит містить задачі, які або вже розв'язані учнем, або розв'язання яких він розпочав, але не встиг довести до кінця, тобто до відповіді. Будь-яку задачу, яку учень розв'язує у Середовищі розв'язання, можна зберегти у зошиті, а у наступному сеансі роботи продовжити її розв'язання.

У зошитах зберігаються всі задачі, розв'язувані учнем у середовищі розв'язання. Особливість ПМК ТерМ полягає в тому, що кожен його користувач може мати декілька зошитів. Ми пропонуємо вчителю ввести в своєму класі власну систему учнівських зошитів. Можна, наприклад, запропонувати учням створювати нові зошити на кожному уроці або заводити нові зошити на кожен тему. Якщо такої системи не буде створено, вчитель та учні вимушені будуть шукати потрібні задачі серед великої кількості інших невпорядкованих задач.

2.5. Середовище розв'язання

Середовище розв'язання (СРЗ) є основним модулем ПМК ТерМ. СРЗ – це потужний інструмент, за допомогою якого користувач може розв'язувати алгебраїчні задачі за 7-9 класи відповідно.

Відкривши СРЗ, користувач має вибрати одну із задач Задачника або скористуватися командою Задача/Нова задача. У вікні, що відкриється за цією командою, треба обрати в меню один з типів задач та ввести умову відповідної типової задачі з клавіатури, користуючись математичним редактором. Після того як умову задачі буде введено, користувач має вибрати один з режимів розв'язання: або автоматичний режим, або режим перевірки кроку розв'язання, або змішаний режим. Розв'язуючи задачу в автоматичному режимі, користувач вибирає з Довідника те перетворення, яке він хоче виконати, а комп'ютер виконує це перетворення. У режимі перевірки кроку розв'язання користувач самостійно виконує крок розв'язування задачі, а комп'ютер перевіряє правильність виконання цього кроку.

Процес розв'язування задачі користувач здійснює за допомогою Довідника та математичного редактора. Вчитель повинен розуміти, що техніка роботи користувача в СРЗ є об'єктивно не зовсім простою. Учні мають поступово освоювати методи роботи в СРЗ, математичну символіку, отримувати вміння та навички роботи в СРЗ, зокрема навички роботи в математичному редакторі та вміння користуватися Довідником. Ми вважаємо за потрібне рекомендувати вчителю скласти план освоєння СРЗ. Це можна зробити як на уроках з математики, так і в позаурочний час, виділивши для цього окремі 2-3 години. Як результат, у подальшому вчитель зможе ефективно використовувати СРЗ протягом, як мінімум, трьох навчальних років, поєднуючи класичні методики викладання математики та нові методики її викладання, засновані на використанні інформаційних технологій.

Для перетворення виразів, які не залежать від змінних, в «Середовище розв'язання» передбачається використання різних форм запису чисел і перехід від однієї із цих форм до іншої. Так, раціональне число можна записати у вигляді звичайного, або мішаного дробу та десяткового дробу (скінченного, або періодичного). Для переходу від однієї форми до іншої необхідно виділити число, вибрати потрібну дію й натиснути кнопку «Виконати» у відповідному розділі довідника. Крім того, користувач може перетворити запис числа в стандартну форму, тобто скоротити звичайний дріб, або скоротити дробову частину мішаного дробу. Для виконання деяких перетворень раціональних виразів, зокрема степеневих, необхідно представляти задане число у вигляді суми (різниці), добутку, або відношення двох чисел. У відповідному розділі довідника надано довідки, за допомогою яких можна здійснювати будь-яке з цих представлень. Крім того, є можливість записати число у вигляді степеню. Таке представлення необхідно зробити наприклад для того, щоб використати формулу скороченого множення $a^2 - 3^2 = (a - 3) \cdot (a + 3)$ при розкладанні на множники виразу $a^2 - 9$.

Оскільки у програмі математики 8-го класу загальноосвітньої школи є розділ «Квадратні корені», то довідник «Середовища розв'язання» для 8-го класу

навчання має довідки, що стосуються відповідних перетворень. Так довідка «Добути квадратний корінь» надає можливість знаходити такі корені з раціональних чисел, які являються точними квадратами. За допомогою цієї довідки можна також виносити чисельні множники з під знака квадратного кореня, якщо підкоренеve число є натуральним. Інші довідки можна використати для внесення числа під знак квадратного кореня та для звільнення від ірраціональності у знаменнику. Наприклад число 9 можна представити у вигляді $\sqrt{9^2}$, а число $5 \cdot \sqrt{3}$ - у вигляді $\sqrt{5^2 \cdot 3}$. У довідковому розділі, який стосується чисел є також довідка для знаходження модуля числа.

Щоб полегшити здійснювання перетворень виразів зі змінними, довідник містить довідки, які стосуються заміни виразу змінною: «Позначити вираз змінною», «Підставити вираз замість змінної» та «Надати змінній значення». Наприклад, нехай треба обчислити $3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot b + 5) - 6$, якщо $M(a; b)$ - довільна точка прямої $2 \cdot x - 3 \cdot y = 4$. У полі «Середовища розв'язання» відмітимо двочлен $2 \cdot a - 3 \cdot b$, після чого натиснемо на кнопку «Виконати» у довідці «Позначити вираз змінною». Відкриється вікно «Додатковий вираз», в якому буде записано $2 \cdot a - 3 \cdot b =$. Після знака рівності поставимо літеру "z", тобто позначимо цей вираз через z; потім натиснемо клавішу «Виконати». У робочому полі «Середовища

розв'язання» отримаємо запис:
$$\begin{cases} 3 \cdot (z + 5) - 6 \\ z = 2 \cdot a - 3 \cdot b \end{cases}$$
 Потім відмітимо змінну z й

натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Надати змінній значення». У вікні «Додаткового виразу» запишемо $z = 4$ і натиснемо кнопку «Виконати». У робочому

полі «Середовища розв'язання» отримаємо запис
$$\begin{cases} 3 \cdot (z + 5) - 6 \\ z = 2 \cdot x - 3 \cdot y \\ z = 4 \end{cases}$$
 З рівності $z = 4$

значок змінної z мишкою перетягнемо на літеру z у виразі $3 \cdot (z + 5) - 6$, який буде перетворено на числовий вираз $3 \cdot (4 + 5) - 6$. Після чого залишається двічі клацнути лівою клавішею мишки на знаках арифметичних дій у порядку їх виконання. Для заміни змінної її виразом можна також перетягнути мишкою значок змінної, яким позначено цей вираз, на змінну, яку треба замінити, або двічі клацнути лівою клавішею на змінній, що перетворюється на вираз.

Для виконання перетворень виразів зі змінними зручно користуватися довідкою «Заміна рівних» у довіднику «Вирази». Нехай нам необхідно записати деякий вираз в іншому вигляді, наприклад результат обчислень, скорочення дробів та інше, що ми можемо виконати усно. Для цього необхідно відмітити цей вираз й натиснути кнопку «Виконати» у довідку «Заміна рівних». У вікні «Додаткового виразу», що при цьому відкриється, треба записати перетворену форму розглянутого виразу та натиснути кнопку «Виконати». Якщо перетворення було зроблено без помилки, у робочому полі з'явиться перетворений вираз. Для введення результату перетворень можна використовувати панель редактора.

Розглянемо довідки із розділу «Вирази». У підрозділі «Сполучні закони» надаються довідки, за допомогою яких можна здійснювати згрупування, або розгрупування доданків та співмножників. Наприклад, якщо потрібно згрупувати множники $a \cdot b$ у виразі $a \cdot b \cdot c$, то необхідно виділити вираз $a \cdot b$ і натиснути клавішу «Виконати» у довіднику «Згрупувати співмножники». Довідка із підрозділу «Переміщувальні закони» надає можливість переставляти доданки та співмножники. Наприклад вираз $a - b$ можна за допомогою цієї довідки перетворити на $-b + a$. У підрозділі «Спрощення» передбачається довідка заміни ділення

множенням. Наприклад, складну дріб $\frac{A}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ можна замінити на вираз $A \cdot \frac{c}{b}$. Інші

довідки з цього підрозділу стосуються найпростіших перетворень типу $-(-A) = A$; $(-1) \cdot A = -A$; $A + (-B) = A - B$ та ін. Підрозділ «Розподільчий закон» містить довідки, які дозволяють проводити операції розкриття дужок, винесення за дужки та зведення подібних членів. Для винесення за дужки деякого множника необхідно виділити цей множник у наявному вигляді, а інший множник треба представити у згрупованому вигляді, якщо виникне така потреба. Нехай дано вираз $y^3 - 6 \cdot x \cdot y$. Щоб винести за дужки y , представимо y^3 як $y^2 \cdot y$, а у доданку $6 \cdot x \cdot y$ згрупуємо множник $6 \cdot x$, після чого одержимо вираз $y^2 \cdot y - (6 \cdot x) \cdot y$. Залишається виділити цей вираз і натиснути кнопку «Виконати» у довідці «Винести за дужки». Дуже важливим є підрозділ «Раціональні вирази». Покажемо на прикладі, як користуватися довідкою «Скоротити дріб». Нехай треба скоротити дріб $\frac{12 \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot a \cdot b}$.

Представимо за допомогою довідки «Заміна рівних» число 12 як добуток $2 \cdot 6$, а вираз a^2 у вигляді $a \cdot a$. Після цього підведемо вказівник мишки на дробову рису отриманого дробу, відмітимо цю дріб і натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Скоротити дріб». Отже для скорочення дробу необхідно виділити окремо у чисельнику і знаменнику цього дробу співмножник, на який можна скоротити дріб. Розглянемо тепер, як виконуються дії додавання і віднімання алгебраїчних дробів. Тут можливі три випадки: дробі мають рівні знаменники; дробі мають різні знаменники, причому їх знаменники не містять спільних співмножників; знаменники дробів є різними, але вони мають спільні співмножники. У перших двох випадках можна безпосередньо використати довідку «Додати два дробі», або «Відняти два дробі». Слід підкреслити, що в обох довідках передбачаються два можливих варіанта: дробі мають різні знаменники, та дробі мають однакові знаменники. Для виконання відповідної операції необхідно вибрати один із цих варіантів. Так саме здійснюється додавання і віднімання двох виразів, з яких один є дробом, а інший – цілим виразом. Якщо знаменники дробів різні, але мають спільні співмножники, то спочатку треба звести ці дробі до спільного знаменника. Це можна зробити за допомогою довідки «Помножити чисельник та знаменник дробу на вираз». Після зведення дробів до спільного знаменника відповідні дії виконуються як у випадку дробів з рівними знаменниками. В підрозділі «Раціональні вирази» є також довідки «Помножити дробі» та «Поділити дробі». У другій з цих довідок передбачається випадок, коли дробі мають рівні знаменники.

Довідник розділу «Степені» містить три підрозділи. Перший підрозділ стосується загальних перетворень степенів. Довідки цього підрозділу дозволяють здійснювати операції зі степенями, які мають одну і ту ж основу. Розглянемо приклад: піднести до степеня $(a^5)^3$. Для розв'язання задачі виділімо заданий вираз, виберемо одну з передбачених дій, а саме $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, у довідці «Застосувати перетворення степеню» і натиснемо кнопку «Виконати». Можна виконати і обернене перетворення. Нехай задано вираз x^{12} . Представимо цей вираз у вигляді степеня з основою x^4 . З цією метою виділимо степінь x^{12} та за допомогою довідки «Заміна рівних» запишемо цю степінь у вигляді $(x^4)^3$. Можна зробити це перетворення інакше. Використаємо довідник з розділу чисел і представимо показник 12 у вигляді $4 \cdot 3$. Потім виділимо отриману степінь $x^{4 \cdot 3}$, виберемо потрібну дію у довідку «Застосувати перетворення степеню» і натиснемо кнопку «Виконати». Після цього одержимо вираз $(x^4)^3$. Аналогічно

можна робити перетворення за допомогою дій $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ та $A^m \cdot B^m = (A \cdot B)^m$ у тій самій довідці. Довідка «Поділити степінь на степінь» дозволяє проводити перетворення за допомогою таких дій: $A^m : A^n = A^{m-n}$; $A^m : B^n = (A : B)^n$;

$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$; $\frac{A^n}{A^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n$. Довідка «Спростити степінь» передбачає найпростіші

перетворення степеневих виразів типу $(-A)^{2k} = A^{2k}$ та $(-A)^{2k+1} = -A^{2k+1}$. Підрозділ «Формули скороченого множення» надає можливість виконувати перетворення за допомогою згаданих формул. Наприклад, нехай треба розкласти вираз $x^6 + 8$ на множники. Представимо степінь x^6 у вигляді $(x^2)^3$. Потім необхідно представити число 8 у виді 2^3 . Надалі виділимо вираз $(x^2)^3 - 2^3$ і натиснемо кнопку «Виконати» у довідки «Сума (різниця) кубів». В результаті одержимо потрібний розклад на множники: $(x^2 + 2) \cdot ((x^2)^2 - 2 \cdot x^2 + 2^2)$. Залишається перетворити $(x^2)^2$ на x^4 .

Розглянемо приклад на застосування оберненого перетворення: представити вираз $a^2 + 10 \cdot a + 25$ у вигляді квадрата суми. З цією метою запишемо доданок $10 \cdot a$ у виді $2 \cdot 5 \cdot a$ і число 25 як 5^2 . Потім виділимо вираз $a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2$ і натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Квадрат суми (різності)». Буде отримано вираз: $(a + 5)^2$. У розділі «Степені» є також підрозділ «Перетворення квадратних коренів». Довідка «Основна властивість квадратного кореня» дозволяє замінити один на один члени рівностей $(\sqrt{A})^2 = A$ та $\sqrt{A^2} = |A|$. У цьому підрозділі є також довідка «Перетворення виразів під знаком квадратного кореня», яка дозволяє використати формули типу: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$, $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (за умовою $A \geq 0$) та ін.

Зупинимось коротко на розділі «Рівності». Підрозділ «Перетворення рівностей» містить такі довідки: «Поміняти місцями частини рівності», «Помножити рівність на число», «Додати до обох частин рівності вирази», «Перенести доданок в іншу частину рівності», «Логічні значення числових рівностей». Розглянемо, наприклад, як користуватися довідкою «Додати до обох частин рівності вирази». Треба, по-перше, виділити рівність і натиснути кнопку «Виконати» у цій довідці. У вікні «Додатковий вираз», що з'явиться, необхідно записати вираз, який додається і знову натиснути кнопку «Виконати». Тоді у робочому полі «Середовища розв'язання» буде записана перетворена рівність. Підрозділ «Рівності степенів» дозволяє проводити такі спрощення: рівність $A^n = 0$ замінити на рівність $A = 0$; рівність $A^{2n} = B^{2n}$ - на $A^2 = B^2$; рівність $A^{2n+1} = B^{2n+1}$ замінити на рівність $A = B$. Підрозділ «Рівності квадратних коренів» надає можливість звільнитися від квадратного кореня, а саме замінити рівність $\sqrt{A} = B$ на рівність $A = B^2$ та рівність $\sqrt{A} = 0$ на $A = 0$. Підрозділ «Тотожності» містить дві довідки: «Множення на вираз» та «Скорочення на вираз», якими користуються за стандартними правилами.

Багато можливостей для розв'язування рівнянь надає довідковий розділ «Рівняння». Перший підрозділ «Рівносильні перетворення рівнянь» передбачає заміну рівняння виду $F(x) \cdot G(x) = 0$ на сукупність рівнянь: $\begin{cases} F(x) = 0; \\ G(x) = 0. \end{cases}$ Підрозділ

«Рівняння з модулями» дозволяє звільнитися від модуля та замінити такі рівняння також на сукупності рівнянь без модулів. За допомогою довідки «Розв'язати раціональне рівняння» у відповідному підрозділі можна рівняння $\frac{F(x)}{G(x)} = a$ замінити

на сукупність $\begin{cases} F(x) = a \cdot G(x); \\ G(x) \neq 0. \end{cases}$ Після того, як будуть знайдені корені рівняння

$F(x) = a \cdot G(x)$, можна виключити ті з цих коренів, які є нулями знаменника $G(x)$. Останню дію можна виконати за допомогою довідки «Видалити розв'язки, які не задовольняють умові-нерівності».

Розглянемо наступний розділ Довідника – «Квадратні рівняння». За допомогою довідки «Розв'язати найпростіше квадратне рівняння» можна знайти розв'язки рівнянь виду $x^2 = a$, у кожному з випадків: $a > 0, a < 0, a = 0$. Якщо у рівнянні $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ коефіцієнт $b \neq 0$, то для його розв'язування необхідно використати довідку «Обчислити дискримінант квадратного рівняння». Довідка «Розв'язати квадратне рівняння методом дискримінанту» надає можливість зробити висновок про кількість коренів у кожному з варіантів: $D > 0, D = 0, D < 0$ та знайти ці корені, якщо вони існують. Якщо квадратне рівняння має два різних кореня, то для запису відповіді у стандартному вигляді можна сукупність двох коренів перетворити на систему за допомогою довідки «Записати розв'язок рівняння у вигляді системи найпростіших рівнянь з нумерованими змінними». Після такого перетворення розв'язок квадратного рівняння буде представлено у

вигляді: $\begin{cases} x_1 = a; \\ x_2 = b. \end{cases}$ Довідка «Застосувати теорему Вієта» дозволяє знаходити суму і

добуток коренів квадратного рівняння, яке представлено у стандартному виді $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, а також скласти зведене квадратне рівняння, коли задано сума та добуток його коренів. При розв'язанні задач геометричного, або фізичного змісту, як правило, від'ємні корені квадратного рівняння не задовольняють умові. З метою їх виключення передбачено довідка «Виділити додатні розв'язки рівняння». Після натискання кнопки «Виконати» у цій довідці залишаються тільки додатні корені. У підрозділі «Рівняння з радикалами» довідка «Розв'язати найпростіше рівняння з радикалом» дозволяє проаналізувати рівняння $\sqrt{x} = a$ у випадках $a > 0, a = 0, a < 0$ і знайти його розв'язок, якщо він існує. Довідка «Розв'язати рівняння стандартного виду з радикалами» надає можливість перетворити рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ та

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ відповідно в системи $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$ та $\begin{cases} f(x) = g^2(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ Застосування

довідок з підрозділу «Представлення розв'язків рівнянь» розглянуто вище.

Довідковий розділ «Нерівності» для 9-го класу навчання складається з декількох підрозділів. Підрозділ «Логічні значення числових нерівностей» дозволяє перевіряти правильність вказаних нерівностей. Підрозділ «Основні властивості нерівностей» має такі довідки: «Додати вираз до обох частин нерівності», «Перенести доданок в іншу частину нерівності», «Поміняти місцями частини нерівності». Крім того, є довідка «Помножити нерівність на число», в якій необхідно спочатку зафіксувати знак вибраного множника. Головним тут є підрозділ «Розв'язання нерівностей». Перша довідка цього розділу стосується лінійних рівнянь, при розв'язуванні яких треба враховувати знак коефіцієнта при невідомому. Довідка «Розв'язати найпростішу лінійну нерівність» виду $x > a$ ($x \geq a$); $x < a$ ($x \leq a$) дозволяє записати множину розв'язків будь-якої з цих нерівностей у вигляді відповідного числового проміжку. При розв'язуванні квадратичної нерівності необхідно скласти квадратне рівняння, відповідне нерівності. Це можна здійснювати за допомогою довідки з такою ж назвою. При цьому імена змінних у нерівності і у відповідному рівнянні не можуть бути однаковими. Знаходження множини розв'язків квадратичної нерівності можна виконати за допомогою довідки «Обрати формулу розв'язання». З цією метою

необхідно вибрати підходящий випадок, враховуючи знаки дискримінанта та першого коефіцієнта, і натиснути кнопку «Виконати» у розглянутій довідці. Довідка «Зобразити числовий проміжок» надає можливість відмітити на числовій осі проміжок, що задається формулою типу $x \in (a; b); x \in [a; b]; x \in (-\infty; c]$.

Підрозділ «Перетворення алгебраїчних нерівностей» надає можливість за допомогою довідки «Перетворити нерівність-добуток» замінити нерівність типу $A \cdot B \geq 0$ ($A \cdot B > 0$); $A \cdot B \leq 0$ ($A \cdot B < 0$) на сукупність систем нерівностей

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases},$$

кожна з яких є більш простішою ніж задана. Довідка «Перетворити нерівність-частку» дозволяє зробити аналогічне перетворення нерівностей типу $\frac{A}{B} \geq 0$.

Розглянемо довідку «Перетворити нерівність зі степенями». Вона дозволяє здійснювати такі заміни: нерівність $A^{2 \cdot k} < B^{2 \cdot k}$ можна замінити на $A^2 < B^2$; нерівність $A^{2 \cdot k+1} < B^{2 \cdot k+1}$ - на $A < B$; $A^2 < 0$ - на *False*; $A^2 \leq 0$ - на рівність $A = 0$; $A^2 > 0$ - на

сукупність $\begin{cases} A > 0 \\ A < 0 \end{cases}$; $A^2 \geq 0$ - на *True*. За допомогою довідки «Перетворити нерівність

з радикалом» можна здійснювати такі заміни: нерівність $\sqrt{A} < B$ можна замінити

системою $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$; нерівність $\sqrt{A} > B$ - на сукупність $\begin{cases} B \leq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$. Довідка

«Перетворити нерівність з модулем» надає можливість звести такі нерівності до систем або сукупностей нерівностей без модуля: нерівність $|A| < B$

перетворюється на систему $\begin{cases} A > -B \\ A < B \end{cases}$; нерівність $|A| > B$ - на сукупність $\begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases}$.

Довідковий розділ «Системи» є необхідним для розв'язування як систем рівнянь, так і систем нерівностей. Підрозділ «Алгебраїчні перетворення систем рівнянь» містить довідки, за допомогою яких можна виконувати основні перетворення вказаних об'єктів. Довідка «Множення рівняння на число» надає

можливість перейти від системи рівнянь $\begin{cases} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$ до системи $\begin{cases} a \cdot F_1 = a \cdot G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$, де a -

будь-яке дійсне число, $a \neq 0$. Довідка «Елементарне перетворення рівнянь»

дозволяє замінити систему рівнянь $\begin{cases} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$ на систему $\begin{cases} F_1 + a \cdot F_2 = G_1 + a \cdot G_2 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$, де a -

довільне дійсне число. Частинний випадок цього перетворення при $a = 1$ можна зробити за допомогою довідки «Додавання рівнянь». Використовуючи довідку «Виключення змінної» можна підставляти значення змінної, яке знайдено з одного

із рівнянь системи в інше, тобто перетворити систему рівнянь $\begin{cases} x = H(y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ на

систему $\begin{cases} x = H(y) \\ F(H(y), y) = 0 \end{cases}$. Підрозділ «Логічні перетворення систем» містить довідку

«Розгляд окремих випадків». Ця довідка надає можливість перетворити сукупність

$\left[\begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix} \right]$ на сукупність $\left\{ \begin{matrix} F \\ G \\ F \\ H \end{matrix} \right\}$. Якщо здійснено таке перетворення, то потім можна

проводити окремі перетворення кожної з отриманих систем.

Дуже важливим є підрозділ «Розв'язання систем нерівностей». Довідка «Спростити систему» надає можливість проводити такі заміни: систему

нерівностей $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ можна замінити на нерівність $x < \min(a, b)$; систему $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ - на

нерівність $x > \max(a, b)$; якщо $a \leq b$, то систему нерівностей $\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$ можна замінити

вказівкою на несумісність системи $x \in \emptyset$; систему нерівностей $\begin{cases} x \leq a \\ x \geq a \end{cases}$ можна

замінити на рівність $x = a$. За допомогою довідки «Розв'язати систему найпростіших лінійних нерівностей» можна записати множину розв'язків таких нерівностей у вигляді числового проміжку. Наприклад, якщо $a < b$, то множина усіх

розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$ є проміжок $x \in (a; b]$. Довідка «Знайти

перетин (об'єднання) числових проміжків» дозволяє множину точок числової осі, яка задана системою, або сукупністю проміжків записати у вигляді їх перетину чи

об'єднання. Так множина, яка задана системою $\begin{cases} x \in (a; b) \\ x \in (c; d) \end{cases}$ дорівнює множині

$x \in (a; b) \cap (c; d)$. Якщо множина задана сукупністю $\begin{cases} x \in (a; b) \\ x \in (c; d) \end{cases}$, то вона дорівнює

множині $x \in (a; b) \cup (c; d)$. Довідка «Спростити систему (сукупність), один із членів якої має визначене логічне значення» дозволяє замінити систему, або сукупність

висловлень одним висловленням. Наприклад, систему $\begin{cases} x \in \emptyset \\ F \end{cases}$ можна замінити на

висловлення $x \in \emptyset$.

Довідковий розділ «Прогресії» містить 2 підрозділи: «Арифметична прогресія» та «Геометрична прогресія». В кожному з цих підрозділів надаються 2 довідки, за допомогою яких можна обчислювати член прогресії із заданим номером n та суму перших n членів прогресії, якщо відомі перший член прогресії та її різниця (у випадку арифметичної прогресії), або знаменник (у випадку геометричної прогресії).

2.6. Розв'язувач

Програмний модуль Розв'язувач призначено для розв'язання типових задач, які вивчаються в курсі алгебри у 7-9 класах загальноосвітньої школи. З точки зору функціональності цей модуль є модулем комп'ютерної алгебри. Зауважимо, що за допомогою цього модуля можна розв'язувати значно складніші з точки зору кількості обчислень задачі, ніж ті, які вивчаються в означених класах середньої школи. Результатом розв'язування кожної задачі є відповідь, тобто результат обчислень. Однак, коло розв'язуваних задач за допомогою Розв'язувача менше, ніж у Середовищі розв'язання задач. Необхідно звернути увагу учнів на те, що за допомогою цього інструменту можна розв'язувати лише такі типи задач, які описані

у довідці цього модуля. Інакше програма видасть повідомлення про невідомий тип задач.

Незважаючи на те, що цей модуль не використовується безпосередньо в процесі розв'язування задач в ПМК ТерМ, його можна використовувати як обчислювач у процесі вивчення інших дисциплін (наприклад, фізики) або для розв'язування математичних задач, що виникають на практиці. Інші варіанти використання цього модуля в навчальному процесі вчитель може знайти самостійно.

Зауважимо, що якщо результатом обчислень є неправильна дріб, то відповідь користувачу надається саме у такому вигляді, тобто ціла частина не виділяється.

Зрозуміло, що перелік можливих для розв'язування задач розширюється відповідно до програми з математики для кожного з класів навчання. Так у восьмому класі, на відміну від попереднього, з'являється можливість спростити вираз із квадратними коренями, розв'язати квадратне, раціональне або рівняння з квадратними коренями, систему алгебраїчних рівнянь. У дев'ятому класі додаються можливості розв'язування нерівностей різних типів та систем лінійних нерівностей. Більш детальну інформацію щодо допустимих типів задач цього модуля можна отримати в інструкції користувача.

2.7. Графіки

Програмний модуль Графіки призначено для розв'язування задач графічним способом. Основною з цих задач у сьомому класі є задача розв'язування системи 2-х лінійних рівнянь з двома невідомими. У цій версії користувач може розв'язувати також інші задачі. Прикладом є задача обчислення рівняння прямої, яку проведено через дві задані точки. Основною особливістю версії для сьомого класу є те, що в ній реалізовано лише два геометричні об'єкти – прямі та точки на декартовій площині. Таким чином, у цьому модулі зараз можна розв'язувати геометричні задачі на побудови за допомогою лінійки. Ще одна особливість – можливість використання системи понять аналітичної геометрії точок і прямих на декартовій прямокутній площині. Це дозволяє розв'язувати відповідні задачі, користуючись по суті геометричною мовою. Таким чином, модуль Графіки має достатньо великі дидактичні можливості використання у сьомому класі.

Ще більш широкі можливості використання цього модуля відкриваються у восьмому та дев'ятому класах. Повний перелік допустимих для побудови об'єктів наведено у інструкції користувача. Зауважимо, що дія «побудувати пряму $ax+by=c$ » у 7-му класі перетворюється у побудову лінійної функції $y=kx+b$.

У дев'ятому класі користувачам надається ще одних спектр можливостей, які можна використовувати не лише на уроках алгебри, а й геометрії – це перетворення графіків, такі як паралельний перенос, розтягування/зтискання, симетричне відображення графіка відносно кожної з осей. Реалізовані також основні геометричні побудовання за допомогою циркуля та лінійки – побудовання точок, прямих, відрізків, кіл та їх перетинів.

Задачі, призначені для розв'язування за допомогою модуля Графіки у 8-му та 9-му класах носять творчий характер. Вони безпосередньо не пов'язані з символічними перетвореннями і не зберігаються у зошиті. Вчителю необхідно звернути увагу на те, що перевірити виконання таких задач він має одразу після виконання їх учнем. Це стосується задач четвертого розділу «Функції» і частково тематичної атестації №7 у восьмому класі та задач п'ятого розділу «Функції і графіки» у дев'ятому класі (крім пунктів 5.4 Квадратичні нерівності та 5.5

Властивості функції). Для демонстрації розв'язків нерівностей та систем нерівностей у Середовищі розв'язання використовується числова вісь.

2.8. Довідник

Програмний модуль Довідник відіграє в ПМК ТерМ дуже важливу роль. Він містить усі перетворення, якими можна користуватися в СРЗ, розв'язуючи задачу в автоматичному режимі. Кожне з перетворень реалізовано у вигляді довідки, яка містить необхідну інформацію. Зокрема, кожне з алгебраїчних перетворень представлено формулою або декількома формулами, назвою перетворення, необхідним математичним коментарем, а також довідкою *Як це зробити*, яка містить інструкцію щодо виконання відповідної дії.

Зазначимо, що повний за змістом довідник ПМК ТерМ можна побачити, розкривши програмний модуль Довідник з головної сторінки ПМК ТерМ. У такому вигляді довідник можна використовувати при вивченні нового теоретичного матеріалу, а також при підготовці до виконання практичних завдань, тобто сеансу роботи в СРЗ на нову тему.

Так, у курсі алгебри 7 класу використовуються *раціональні числа*, записані як *звичайні* або *мішані* дроби, а також як *десяткові* або *періодичні десяткові* числа. Звичайно, користувач повинен мати можливість у процесі розв'язування задачі переходити від однієї форми запису числа до іншої. Таким чином, у Довіднику реалізовано довідки про представлення раціональних чисел у різних формах запису. Готуючись до заняття, користувач (учень або вчитель) має можливість, відкривши повний Довідник з головної сторінки, знайти розділ Числа, підрозділ Форми запису чисел та, прочитавши три довідки, дізнатися про всі можливості щодо форм запису чисел, які пропонує ПМК ТерМ користувачу. Повний зміст Довідника наведено в електронному документі „Інструкція користувача ПМК ТерМ”, який входить до складу дистрибутивного диску ПМК (далі - ІК) **7.2**. Ми рекомендуємо вчителю роздрукувати в зручній для учня формі зміст цього пункту ІК таким чином, щоб учні могли ознайомитися зі змістом довідника.

Учитель має бути готовим до того, що деякі з перетворень, представлених у Довіднику, можуть бути незнайомими для учнів. Це, наприклад, стосується довідки п.**7.2.9.1.2** ІК про елементарні перетворення систем лінійних рівнянь. Справа в тому, що це перетворення є стандартним для лінійної алгебри, але не вивчається як таке у загальноосвітній школі. Проте у спеціалізованих школах це універсальне перетворення може викладатися. Тому ми вирішили включити його до нашого Довідника.

Ще однією особливістю деяких довідок є те, що формули-рівності, якими вони представлені, можуть використовуватися як зліва направо, так і справа наліво. Так, рівність $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ може використовуватися як для множення степенів, так і для розкладання степеня на множники. Для того, щоб використовувати такі довідки для перетворень, треба ознайомитися на практиці з порядком їх виконання.

Відзначимо також, що групи перетворень, представлені у певній довідці, на даному етапі навчання (7-ий клас) є особливо важливими з методичної точки зору. Вони представляють той навчальний матеріал, який зараз вивчається. Довідник зроблено таким чином, що користувач повинен обрати та „включити” за допомогою такого елемента інтерфейсу, як перемикач, потрібне перетворення з групи. Прикладом таких особливо важливих перетворень є група формул з довідки **7.2.4.1.1** *Загальні перетворення степенів* ІК, які представляють основні властивості степенів. Для інших груп перетворень, які представлені однією довідкою, комп'ютер сам обирає потрібне з перетворень групи, аналізуючи виділений вираз.

Нарешті, в останньому розділі довідника представлені відповіді до задач. З методичної точки зору справа полягає в тому, що відповідь-формула має супроводжуватися деяким логічним висновком. Так, наприклад, розв'язання лінійного рівняння треба проаналізувати на кількість розв'язків. Таке рівняння може мати або єдиний розв'язок, або безліч розв'язків, або не мати розв'язків. Довідник надає користувачу можливість зробити цей висновок. Деякі задачі у розумінні ПМК ТерМ є нетиповими. Це означає, що по закінченні розв'язання логічного висновку робити не треба, а треба лише повідомити комп'ютер про закінчення роботи. Прикладом такої задачі є задача на розкладання многочлена на множники. Розклавши многочлен на множники, користувач повідомляє комп'ютер про закінчення за допомогою довідки п. **7.2.12.7.1 Задачу розв'язано**.

У пункті 2.5. даного документу розглянуто деякі особливості використання Довідника під час роботи у СРЗ.

3. Використання ПМ Навчальний посібник та ПМ Вправи

Вправи

Вправи для самоперевірки містяться у більшості параграфів *Навчального посібника* (НП). У цьому класі перші завдання з пропозицією „Перевір себе” ми зустрічаємо у §2 *Рівносильні рівняння*. У даному параграфі запропоновані завдання наступних типів:

1. спростити вираз;
2. розкрити дужки у виразі;
3. привести подібні у виразі.

Ці завдання можна використати на етапі актуалізації опорних знань на початку вивчення зазначеної теми або при вивченні теми „Вирази”. Рівень складності наданих завдань відповідає рівню А пункту „Тотожні рівні вирази. Тотожності” за підручником [1]. Звичайними у традиційній системі навчання математики є вправи для повторення, в якості яких можна використовувати зазначені завдання.

Третій параграф НП знайомить учнів з лінійними рівняннями і надає іншу систему вправ для самоперевірки:

1. спростити рівність;
2. привести рівняння до вигляду $a \cdot x = b$;
3. розв'язати рівняння.

У завданні спростити рівність необхідно записати вираз у найпростішому вигляді з цілими коефіцієнтами. Наприклад, рівняння $3 - x = 4 - 3 \cdot x$ достатньо привести до вигляду $2 \cdot x = 1$. Пропоновані завдання відповідають державній програмі з математики, сприяють кращому засвоєнню матеріалу теми та готують учня до виконання більш складних вправ у *Середовищі розв'язання*.

Наступний параграф „Розв'язання задач за допомогою рівнянь” є складним і дуже важливим для засвоєння, оскільки цей метод широко використовується у подальшому курсі алгебри (наприклад, під час вивчення теми „Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь”), а також у геометрії, фізиці, хімії та в інших шкільних дисциплінах. У даному параграфі пропонуються чотири типи завдань, які відрізняються за рівнем складності. У першій, другій і четвертій групах завдань вимагається розв'язати рівняння відносно вказаної змінної. Але у першій групі містяться найпростіші лінійні рівняння з однією змінною, у другій – з двома змінними, а у четвертій – рівняння з двома змінними, надані у вигляді дробів. Можливо, не всі учні зможуть розв'язати ці вправи усно і скористаються чернеткою. Третя група завдань пропонує розв'язати рівняння, які зводяться до лінійних і є підготовчою до четвертої групи завдань.

Оскільки завдання цього параграфу безпосередньо не стосуються розв'язування текстових задач, а є пропедевтичними, то вони можуть бути використані як на попередніх заняттях (рівносильні рівняння, лінійні рівняння), так і у подальших темах, як вправи для повторення.

Вивчення наступного розділу *Цілі вирази* передуює темі *Рівняння* за підручником [1], але викладення матеріалу у *НП* відповідає підручнику [2] та календарно-тематичному плануванню [3]. У п'ятому параграфі „*Вирази зі змінними*” пропонуються дві групи вправ, у яких необхідно знайти значення виразу при даному значенні змінної. Перша група містить вирази з однією змінною, а друга – з двома. Ці групи завдань є підготовчими для засвоєння питань, що стосуються обчислення значень функцій та побудови їх графіків, систем лінійних рівнянь, розв'язування нерівностей тощо.

Шостий параграф містить вирази зі степенями і пропонує знайти значення виразу при даному значенні однієї з двох змінних.

§ 8 *Одночлени* надає наступну систему вправ:

1. виконати дії;
2. спростити вираз;
3. привести одночлен до стандартного вигляду;
4. перемножити одночлени;
5. знайти найбільший спільний дільник (НСД) одночленів;
6. знайти найменше спільне кратне (НСК) одночленів;
7. представити одночлен P у вигляді степеня іншого одночлена;
8. представити одночлен у вигляді одночлена від однієї змінної при заданому значенні іншої змінної;
9. знайти одночлен M з рівності.

Метою перших чотирьох груп завдань є перевірка умінь школярів використовувати властивості дій над степенями з рівними основами, здійснювати перетворення добутку одночленів та приводити їх до стандартного вигляду. Ці вміння необхідні для знаходження НСД та НСК одночленів, а також при розв'язуванні завдань, які пов'язані з многочленами та раціональними виразами.

З поняттями НСД та НСК натуральних чисел учні знайомі з 6 класу. Але до початку розв'язування завдань типів 5 та 6 з учнями необхідно додатково обговорити поняття НСД та НСК для одночленів. Різниця для їх знаходження полягає у тому, що натуральні числа ми подаємо у вигляді добутку простих множників, а одночлени – змінних. Ці завдання не є обов'язковими для виконання усіма учнями, але стануть у нагоді на факультативних заняттях, кружках, у спеціалізованих класах. Пропоновані завдання є дуже корисними для підготовки до вивчення теми перетворення раціональних виразів зі змінними.

У сьомій та дев'ятій групах завдань учням необхідно провести аналіз степенів змінних, які входять до одночленів, і встановити зв'язок між їх показниками. Для успішного виконання вправ цієї групи потрібно досконале володіння властивостями дій зі степенями. Завдання восьмої групи схожі з завданнями шостого параграфу, але змінна входить до виразу в деякому степені.

Завдання із §10 містять вправи на приведення до стандартного вигляду суми та різниці двох многочленів, що являє собою зведення подібних членів. Без сформованості на належному рівні відповідних навичок неможливий перехід до більш складних вправ на дії з многочленами.

§11 Множення многочлена на одночлен разом із попереднім параграфом виступають як основа для засвоєння дії множення двох многочленів, що розглядається у наступному параграфі. У завданнях необхідно помножити одночлен на многочлен. У першій групі завдань наведені многочлен і одночлен з однією і тією ж самою змінною, а у другій з двома змінними.

Дванадцятий параграф містить три типи завдань:

1. винести за дужки спільний множник;
2. розкласти на множники;
3. представити у вигляді многочлену від змінної x .

Останні два параграфи даного розділу (§13 та §14) присвячено знайомству з формулами скороченого множення різниці квадратів та квадрату двочлена відповідно. У §13 перші дві групи завдань є однаковими за рівнем складності але оберненими одна до одної (розкласти на добуток та записати у вигляді многочлена). Система вправ чотирнадцятого параграфу аналогічна вище наведеним і містить чотири групи завдань (дві - на застосування формули квадрату суми, та дві – на формули квадрату різності).

§ 15 супроводжується трьома групами завдань. У перших двох групах учні повинні спростити вираз за допомогою розкриття дужок та формул скороченого множення. В одній серії завдань передбачено застосування формули різниці квадратів, а в іншій – квадрату двочлена. У третій групі завдань необхідно визначити невідомий вираз P , який перетворює задану рівність у тотожність. Система вправ до § 15 є дуже важливою, тому що вона навчає школярів здійснювати перетворення многочленів. Аналогічні вправи на розклад многочленів надаються також і до § 16.

Вправи, які супроводжують §§ 21-25, стосуються теми „Системи лінійних рівнянь”. Метою цих вправ є навчання школярів методам розв’язування таких систем: перетворення системи лінійних рівнянь до канонічного вигляду, знаходження виразу однієї із змінних через іншу, підстановка цього виразу в деяке рівняння системи, виключення деякої змінної з одного із рівнянь системи способом додавання, знаходження числового значення однієї із змінних, підстановка цього значення в одне із рівнянь системи і знаходження значення іншої змінної. Одним словом, ці вправи охоплюють усі прийоми, які використовуються при розв’язуванні систем лінійних рівнянь.

Завдання для восьмого і дев’ятого класу підібрано за тими ж самими принципами. Виконання вправ формує вміння порівнювати числа, представлені у різних формах (звичайний, мішаний, десятковий дріб, число під знаком кореня). Завдання знайти найбільший корінь квадратного рівняння вимагає від учнів усно знайти корені квадратного рівняння, використовуючи, наприклад, теорему Вієта.

Вправа „Знайти найбільше або найменше за модулем ціле число, що належить даному інтервалу” сприяє більш глибокому засвоєнню понять модуля, відкритого та замкнутого проміжків.

Немає вправ для самоперевірки у тих розділах, що пов’язані з графіками, доведеннями або обчисленнями. У восьмому класі це такі параграфи, наприклад, як §18. Розв’язування задач за допомогою квадратних рівнянь, §19. Рівняння, що зводяться до квадратних і у дев’ятому класі у §5 Доведення нерівностей, §7 Перетворення графіків функцій, §11 Графічне розв’язування системи рівнянь, 12 Властивості функції, §16 Задачі на обчислення сум, §17 Математичне моделювання.

4. Організація практичної роботи в ПМК ТерМ

4.1. Структура задачника

Завдання у задачнику розташовані у тому ж самому логічному порядку, що і у навчальному посібнику. Зауважимо, що у сьомому класі розділам 2 „Цілі вирази” (задачі, які стосуються дій з одночленами) і 3 „Перетворення цілих виразів” відповідає у задачнику розділ „Розкладання многочленів на множники”. Окремо згруповані текстові задачі на розв’язування за допомогою систем лінійних рівнянь. На допомогу вчителю для проведення тематичних атестацій з кожної теми надається по 6 варіантів завдань. За часом проведення кожен варіант атестації

розрахований на цілий урок (45 хв.). Залежно від рівня знань кожного учня вчитель може варіювати навантаження, виділяючи частину вправ як додаткові. Перелік тематичних атестацій наведено у пункті 2.3. даного документу.

4.2. Розв'язання задач у режимі перевірки

Цей режим є найбільш корисним для розв'язування нескладних задач. Він передбачає знання учнями основних формул та вміння проводити основні перетворення рівнянь і математичних виразів.

Покажемо основні принципи роботи в режимі перевірки на прикладі розв'язування такої задачі: спростити вираз $(x+2) \cdot (x+4) - (x+3)^2$. У вікні модуля „Середовище розв'язання” підведемо вказівник мишки до заголовку „Задача”, що знаходиться на верхній панелі і натиснемо ліву клавішу мишки. З'явиться надпис „Режим розв'язування”. Ще раз натиснемо ліву клавішу мишки на цьому надпису і потім виберемо потрібний режим з трьох, назви яких відкриються: „Автоматичний”, „Перевірка кроку розв'язання”, „Змішаний” (у наведеному прикладі, зрозуміло, обираємо режим „Перевірки кроку розв'язання”). Потім необхідно натиснути кнопку „Почати розв'язування” на верхній панелі. В полі зошита з'явиться надпис: „Почнемо розв'язання” і умова задачі: $(x+2) \cdot (x+4) - (x+3)^2$. Підведемо вказівник мишки до знаку множення у виразі $(x+2) \cdot (x+4)$ і натиснемо праву клавішу мишки. Після надпису „Виконаємо наступне перетворення” буде записана копія виразу $(x+2) \cdot (x+4)$ і знак рівності. Праворуч від цього знаку учень з клавіатури набирає новий вираз, який є тотожним перетворенням заданого: $x \cdot (x+4) + 2 \cdot (x+4)$. Потім необхідно підвести вказівник мишки до заголовку „Хід розв'язування” на верхній панелі і натиснути ліву клавішу. Після цього з'явиться надпис „Виконати крок”. На цьому надпису треба ще раз натиснути ліву клавішу мишки. Під заголовком „Отримаємо” буде записано перетворений вираз: $x \cdot (x+4) + 2 \cdot (x+4) - (x+3)^2$. Якщо при виконанні перетворення учень зробить помилку, то на „світлофорі” у правому боці поля зошита спалахне червоне світло. Для подальшого розв'язання задачі необхідно виправити помилку, оскільки комп'ютер „відмовиться” від запису неправильного виразу. Аналогічно перетворюються добутки $x \cdot (x+4)$ та $2 \cdot (x+4)$, після чого буде одержано вираз $x^2 + 4 \cdot x + 2 \cdot x + 8 - (x+3)^2$. Для зведення подібних членів можна натиснути праву клавішу мишки на знаку „+” у виразі $4 \cdot x + 2 \cdot x$ і знову „виконати наступне перетворення”, як це було описано вище, тобто після знака рівності набрати з клавіатури $6 \cdot x$, потім „Виконати крок” і отримати вираз $x^2 + 6 \cdot x + 8 - (x+3)^2$. Однак існує інший спосіб зведення подібних членів: можна двічі клацнути лівою клавішею мишки на тому ж знаку „+”, після чого з'явиться вираз $6 \cdot x$. Для перетворення $-(x+3)^2$ необхідно натиснути праву клавішу на знаку дужки у цьому виразі, а потім набрати з клавіатури перетворений вираз: $-(x^2 + 6 \cdot x + 9)$ і „Виконати крок”. Аналогічно для розкриття дужок в отриманому виразі треба ще раз натиснути ліву клавішу мишки на знаку дужки. Після зведення подібних членів буде отримано -1 . По завершенні розв'язування необхідно знайти заголовок „Відповіді” у правій частині вікна і натиснути кнопку „Виконати” біля надпису „Задачу розв'язано”.

4.3. Розв'язання задач у режимі автоматизації

Цей режим призначено для розв'язування більш складних задач, які потребують виконання великої кількості засвоєних раніше елементарних перетворень. Він вивільняє додатковий час за рахунок скорочення процесу

розв'язування та дозволяє зосередитися учневі на сутності використовуваних методів.

Покажемо застосування автоматичного режиму розв'язування на такому прикладі: спростити вираз $(12 \cdot a - b)^2 - (9 \cdot a - b) \cdot (16 \cdot a + 2 \cdot b)$. Підведемо вказівник мишки до знаку дужки у виразі $(12 \cdot a - b)^2$ і натиснемо праву клавішу мишки. У правій частині вікна відкриється перелік можливих перетворень над виразами. Оскільки нам треба скористатися формулою скороченого множення, то знайдемо у цьому списку перетворення $(A+B)^2$ і натиснемо кнопку „Виконати”. У лівій частині з'явиться надпис „Застосуємо формулу квадрата суми (різності). Отримаємо:” і нижче перетворений вираз:

$$(12 \cdot a)^2 - 2 \cdot 12 \cdot a \cdot b + b^2 - (9 \cdot a - b) \cdot (16 \cdot a + 2 \cdot b).$$

Знову підведемо вказівник мишки до знаку дужки у виразі $(12 \cdot a)^2$ і натиснемо праву клавішу мишки. Потім натиснемо кнопку „Виконати” на перетворенні $A = B \rightarrow F(A) \square F(B)$. Відкриється вікно „Додатковий вираз”, в якому записано $(12 \cdot a)^2 =$. Праворуч від цього надпису необхідно ввести перетворений вираз $144 \cdot a^2$ і натиснути кнопку „Виконати”. У полі зошита з'явиться перетворений вираз: $144 \cdot a^2 - 2 \cdot 12 \cdot a \cdot b + b^2 - (9 \cdot a - b) \cdot (16 \cdot a + 2 \cdot b)$. Щоб знайти добуток $2 \cdot 12$ можна двічі клацнути лівою клавішею мишки на знаку множення. Аналогічно, якщо двічі клацнути лівою клавішею на знаку множення між дужками у виразі $-(9 \cdot a - b) \cdot (16 \cdot a + 2 \cdot b)$, одержимо: $-(144 \cdot a^2 - 16 \cdot a \cdot b + 18 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b^2)$. Ще раз двічі клацнемо на знаку „-” перед дужкою і дістанемо вираз:

$$144 \cdot a^2 - 24 \cdot a \cdot b + b^2 - 144 \cdot a^2 - 18 \cdot a \cdot b + 16 \cdot a \cdot b + 2b^2.$$

Після зведення подібних членів отримаємо $-26 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2$. Зафіксуємо відповідь за допомогою відповідної кнопки, обравши варіант „Вираз спрощено”.

4.4. Розв'язання задач у змішаному режимі

За умови роботи у змішаному режимі учень має можливість виконувати кожну дію у зручному для нього режимі.

4.5. Використання зошитів

Кожен учень може мати декілька зошитів. За бажанням учень зберігає у зошиті як повністю розв'язану задачу, так і задачу, до розв'язування якої він хотів би повернутися пізніше. Під час зберігання з'являється діалогове вікно, у якому учень вводить тему уроку та номер (або дату). Ці поля є обов'язковими для заповнення. З кожної теми може проводитися декілька уроків. Учитель може перевірити задачі, збережені у зошиті, у будь-який зручний час, обираючи під час персоніфікації необхідний клас, прізвище учня та потрібний зошит (якщо їх декілька).

5. Розв'язувач

Проілюструємо роботу модулів „Розв'язувач” та „Графіки” на прикладі виконання такої задачі: Знайти значення параметра a , при якому система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 5 \\ 3 \cdot x - y = 1 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y = a \end{cases} \text{ є сумісною.}$$

Відкриємо вікно модуля „Розв'язувач”. У лівій частині вікна запишемо систему рівнянь, яка містить тільки перших два рівняння заданої системи (із системи вилучається рівняння, вільним членом якого є невизначений параметр a):

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = 5 \\ 3 \cdot x - y = 1 \end{cases} \quad (*)$$

У правій частині вікна підведемо вказівник мишки до заголовку меню „Системи рівнянь” і натиснемо ліву клавішу мишки. З'явиться довідниковий розділ „Системи лінійних рівнянь”. Натиснемо кнопку „Виконати” у довідниковому вікні цього розділу „Розв'язати систему лінійних рівнянь”. У нижній частині під умовою задачі буде записаний розв'язок системи: $x = 1; y = 2$. Потім замість системи рівнянь у графі „Умова” запишемо ліву частину третього рівняння заданої системи $2 \cdot x + 3 \cdot y$ та значення змінних x і y , які є розв'язком системи рівнянь (*): $x = 1; y = 2$. Потім відкриємо довідниковий розділ „Вирази” і натиснемо мишкою на кнопку „Виконати” у довідниковому вікні „Знайти значення виразу при даних...”. У нижній частині лівої половини вікна дістанемо відповідь: 8. Це й буде шукане значення параметру a .

6. Графіки

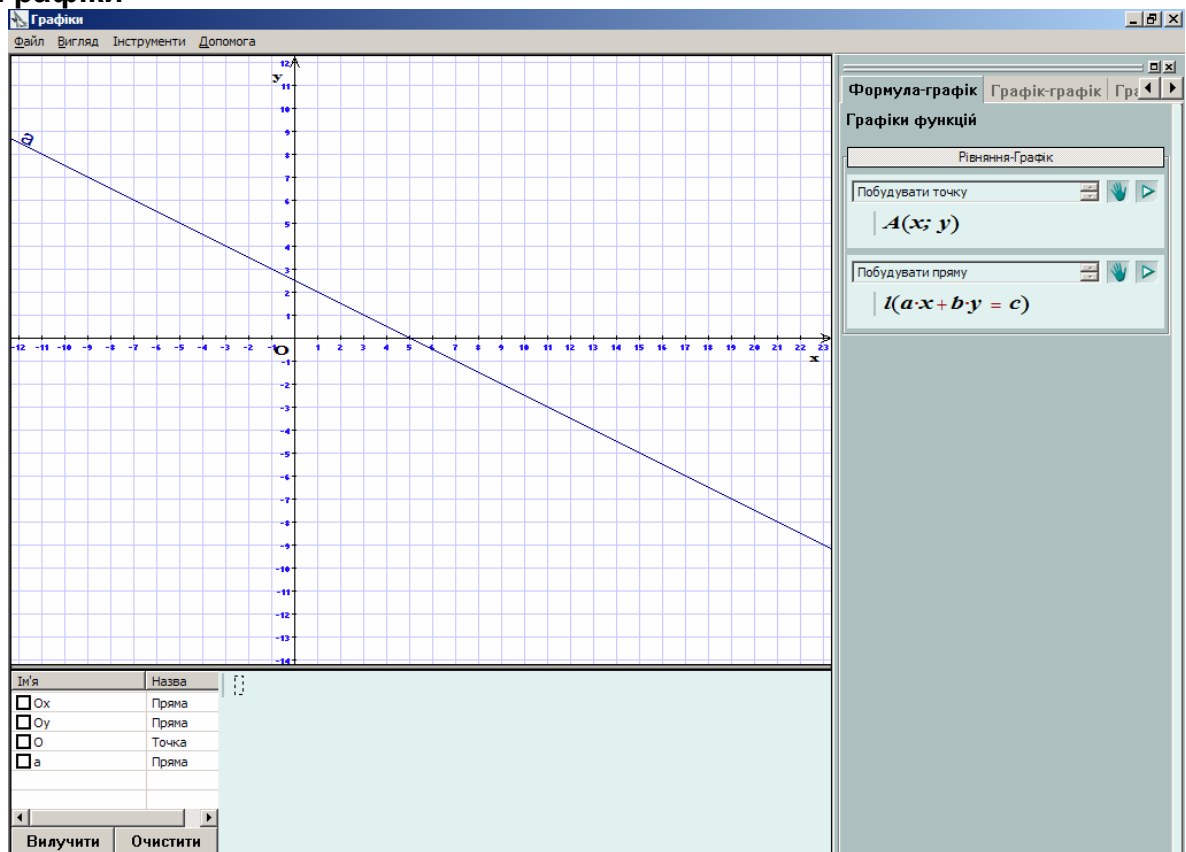


Рис. 7.1.

Розв'яжемо ту ж саму задачу за допомогою модуля „Графіки”. Відкриємо відповідне вікно. У лівій частині вікна з'явиться зображення координатної площини, а у правій – назва довідників, за допомогою яких проводиться робота у цьому модулі: „Рівняння - графік”, „Графік - графік”, „Графік - рівняння”. Щоб побудувати пряму $x + 2 \cdot y = 5$, в поле „Рівняння” необхідно ввести ім'я прямої (скажімо, a), після чого у круглих дужках записати її рівняння. Потім треба підвести вказівник мишки до заголовку „Рівняння - графік” і натиснути ліву клавішу мишки. Одне із довідникових вікон, що з'являються, призначено для побудови прямих. Після натиснення кнопки „Виконати” на координатній площині буде побудована потрібна пряма (рис. 7.1).

Аналогічно будуюмо другу пряму $3 \cdot x - y = 1$, надавши їй будь-яке інше ім'я (наприклад b). Ці дві прямі перетинаються у деякій точці М. Для знаходження координат цієї точки необхідно відмітити у списку побудовань імена прямих, що перетинаються у точці М. Потім ввести в поле „Рівняння” ім'я точки, в довідниковому розділі „Графік - графік” вибрати вікно „Знайти перетин прямих” і натиснути кнопку „Виконати”. На координатній площині з'явиться зображення точки М. Після цього у списку імен вибрати ім'я точки і в довідниковому розділі „Графік - рівняння” натиснути кнопку „Виконати”, яка знаходиться у вікні „Знайти координати точки”. У полі рівняння з'явиться ім'я точки та її координати: $M(1; 2)$. Якщо задана система рівнянь сумісна, то пряма $2 \cdot x + 3 \cdot y = a$ повинна проходити через точку М. Надамо параметру a деяке значення, наприклад, $a=12$ і побудуємо на координатній площині відповідну пряму. Зазначимо, що при переміщенні точки уздовж прямої $2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$ праворуч на три клітинки вона переміщується до низу на дві клітинки (рис. 7. 2).

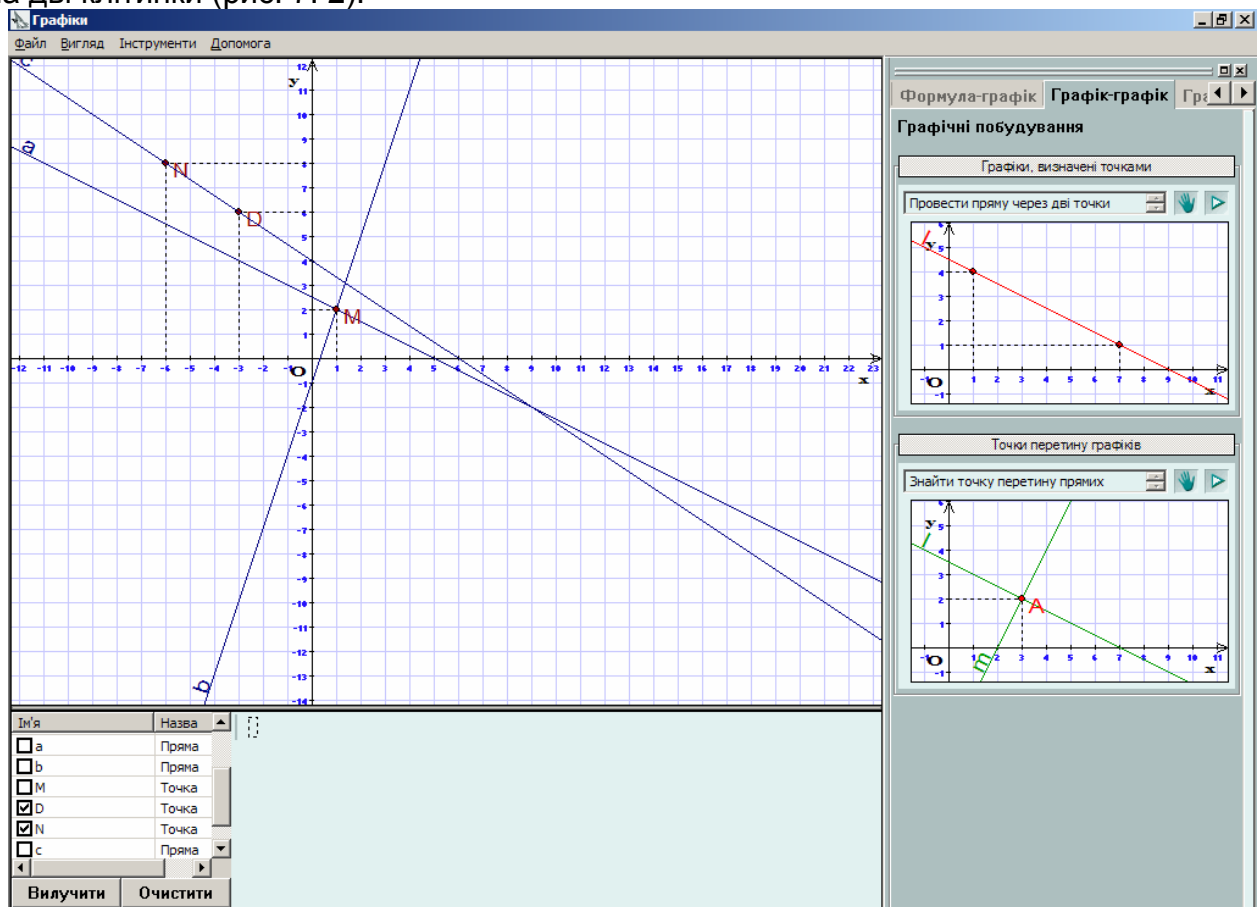


Рис. 7.2.

Пряма $2 \cdot x + 3 \cdot y = a$ паралельна прямій $2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$, а тому координати точки першої прямої змінюються при переміщенні у тій самій пропорції, що і координати точки другої прямої. Оскільки пряма $2 \cdot x + 3 \cdot y = a$ проходить через точку $M(1;2)$, то вона проходить також через точку P , яка знаходиться на три клітинки праворуч від точки M і на дві клітинки нижче її. Отже, точка P має координати $x = 1 + 3 = 4; y = 2 - 2 = 0$. Зараз потрібно знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки $M(1;2)$ та $P(4;0)$. Побудуємо спочатку точку P . Для цього в полі „Рівняння” необхідно ввести ім'я точки P та її координати, потім в довідниковому розділі „Рівняння - графік” натиснути кнопку „Виконати” у довідниковому вікні „Побудувати точку”.

У результаті точка P буде побудована на координатній площині. Тепер можна побудувати пряму MP . З цією метою виберемо у списку побудовань імена точок M і P , введемо в поле „Рівняння” ім'я прямої і у вікні „Провести пряму через дві точки” довідникового розділу „Графік - графік” натиснемо кнопку „Виконати”. Після цього на координатній прямій з'явиться зображення прямої MP . Потім у списку імен відмітимо ім'я прямої MP і натиснемо кнопку „Виконати” у вікні „Знайти рівняння прямої” довідникового розділу „Графік - рівняння”. В полі „Рівняння” з'явиться ім'я прямої та її рівняння: $2 \cdot x + 3 \cdot y - 8 = 0$.

Звідси робимо висновок, що задана система рівнянь буде сумісною тоді і тільки тоді, коли $a = 8$.

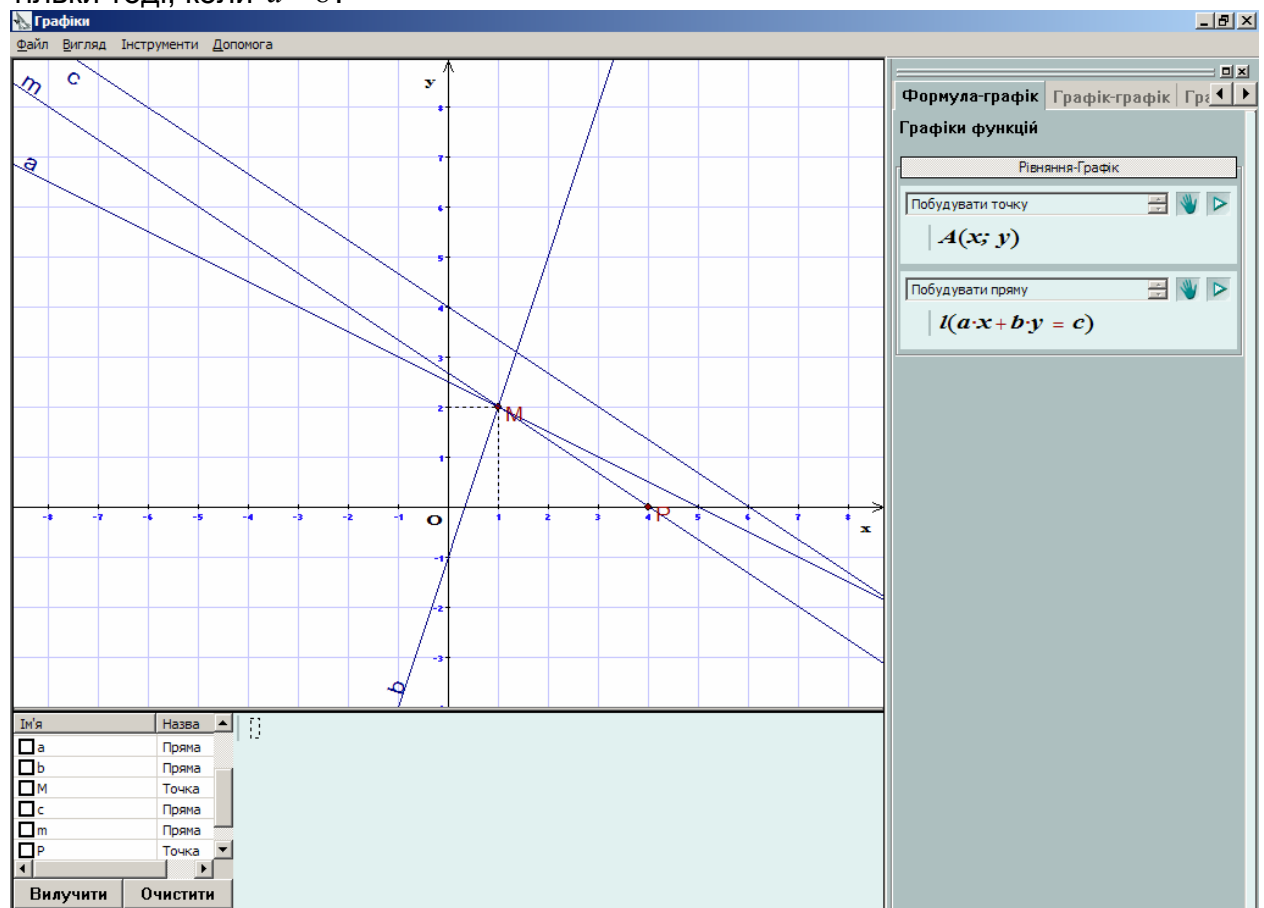


Рис. 7.3.

Література

1. Кравчук В., Янченко Г., Алгебра. Підручник для 7 класу./ за ред. Слєпкань З.І. Видання друге, перероблене та доповнене. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 192 с.

2. Бевз Г.П. Алгебра: проб. підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 1997. – 303 с.
3. Математика. Календарно-тематичне планування 5-11 класи. 2001-2002 н.р. Тернопіль: „Астон”, 2001. – 40 с.